10 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe le nombre complexe z associe le point M′ d'affixe le nombre complexe $z' = iz - 1 - i$.
Montrer que g est une isométrie et la caractériser.

11 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f l'application de P dans P, qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M(x',y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. a. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.
b. En déduire que f est symétrie orthogonale.

12 Dans le plan orienté P, on considère l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe le nombre complexe z associe le point M′ d'affixe le nombre complexe $z' = i\bar{z}$.
1. Montrer que f est une isométrie.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3. En déduire la nature de f.

13 Soit OAB un triangle équilatéral direct.

On désigne par Δ la droite perpendiculaire à (OA) en O, par D la médiatrice de [AB] et par S_1, S_2, S_3 et S_4 les symétries orthogonales d'axes respectifs (OA), (OB), Δ et D.
On note $f = S_3 \circ S_2 \circ S_1$.
1. Montrer que $f = S_3 \circ R$ où R est une rotation que l'on caractérisera.
2. Montrer que $R = S_3 \circ S_4$.
3. Identifier f.

14 Soit A et B deux points distincts du plan et f une isométrie qui laisse globalement invariant le segment [AB].
1. Montrer que f fixe le milieu de [AB].
2. En déduire toutes les isométries qui laissent globalement invariant le segment [AB].

15 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O.

1. Donner la nature des isométries qui laissent $\mathscr{C}$ globalement invariant.
2. Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{C}$.
Déterminer les isométries qui laissent globalement invariants le cercle $\mathscr{C}$ et le triangle OAB.

16 Soit ABC un triangle équilatéral direct et f une isométrie qui envoie A sur B et B sur C.
1. Montrer que si f n'admet pas de points invariants, alors f est une symétrie glissante.
2. On suppose que f admet un point invariant.
a. Montrer que f n'est pas une symétrie orthogonale.
b. Identifier alors f.

17 Soit Δ et Δ' deux droites strictement parallèles, A est un point de Δ et B est un point de Δ'. Déterminer toutes les isométries qui transforment Δ en Δ' et A en B.

18 Soit ABCD un carré direct de centre I.

On se propose de déterminer les isométries du plan qui laissent globalement invariant le carré ABCD.
Soit f une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le carré ABCD.
1. a. Montrer que $f(I) = I$.
b. En déduire que f est soit l'identité du plan, soit une rotation de centre I et d'angle non nul et soit une symétrie orthogonale d'axe passant par I.
2. On suppose que f n'est pas une symétrie orthogonale.
Montrer que
Si $f(A) = A$, alors f est l'identité.
Si $f(A) = B$, alors f est la rotation de centre I d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Si $f(A) = C$, alors f est la symétrie centrale de centre I.
Si $f(A) = D$, alors f est la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
3. On suppose que f est une symétrie orthogonale.
Montrer que
Si $f(A) = A$, alors f est la symétrie orthogonale d'axe (IA).

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn